

TRABAJO DE VERANO

• **Tema 1: Números reales**

1. Escribe todos los conjuntos a los que pertenecen los siguientes números:

a) $-0,3$ b) 2^{-2} c) $\frac{-46}{8}$ d) $\frac{2\pi}{3}$ e) $2^{\frac{1}{3}}$
f) $4^{\frac{1}{2}}$ g) $\sqrt[3]{-8}$ h) $\sqrt{-9}$ i) $-\sqrt{9}$ j) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

2. Resuelve las siguientes potencias sin utilizar calculadora:

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$ b) $(-27)^{\frac{1}{3}}$ c) $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$ d) $\left(\frac{27}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$
e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ f) $16^{\frac{3}{2}}$ g) $\left(\frac{-27}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$ h) $\left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

3. Reduce a una sola potencia:

a) $\frac{2^x \cdot 8^{x+1}}{16^{x+3} : 2^{3x-1}}$ b) $\frac{3^{2x+1} : 9^{x-3}}{27^{2x+3}}$

4. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{10}} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt{40}}$ b) $\frac{\sqrt{18} \cdot (\sqrt[4]{12})^3}{\sqrt[5]{8}}$
c) $\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{24} + 3\sqrt[3]{54} + 5\sqrt[3]{81}$ d) $\sqrt{\frac{27}{4}} - \sqrt{12} + 5\sqrt{\frac{75}{16}}$

5. Racionaliza:

a) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ b) $\frac{5}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$ c) $\frac{2}{3\sqrt{8}}$ d) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

6. Resuelve los siguientes logaritmos sin utilizar calculadora:

a) $\log_2 16$ b) $\log_3 \sqrt{243}$ c) $\log_{81} 3$ d) $\log_{\frac{1}{9}} \left(\frac{\sqrt[4]{3}}{3}\right)$
e) $\log_3 81$ f) $\log_{\sqrt{2}} 8$ g) $\log_{\frac{1}{9}} 3$ h) $\log_5 \left(\frac{25}{\sqrt{5}}\right)$

7. Reduce a un solo logaritmo:

a) $\log 2 - 3 \log 5 + \log 25$ b) $3 \log 5 + 2 \log 3 - \log 45$

8. Sabiendo que $\log 2 \approx 0'301$ y $\log 3 \approx 0'477$, calcula los siguientes logaritmos:

$$\begin{array}{lll} a) \log \sqrt[5]{16} & b) \log 0'0125 & c) \log \frac{16}{27} \\ d) \log \sqrt[3]{0'6} & e) \log 40'5 & f) \log \frac{8}{25} \end{array}$$

• **Tema 2: Polinomios**

9. Factoriza los polinomios:

$$a) P(x) = 3x^3 + 6x^2 - 15x - 18 \qquad b) P(x) = 5x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 10x$$

• **Tema 3: Ecuaciones y sistemas**

10. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

$$\begin{array}{ll} a) x^4 - 5x^2 + 4 = 0 & b) 4x^4 + 7x^2 - 2 = 0 \\ c) x^4 - 2x^2 = 0 & d) x^4 - 10x^3 + 9 = 0 \end{array}$$

11. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:

$$a) \frac{2x+2}{x-1} - \frac{8}{x^2-1} = x \qquad b) \frac{3}{x-2} + \frac{8}{x+5} = \frac{x+1}{x^2+3x-10}$$

12. Resuelve las siguientes ecuaciones radicales:

$$\begin{array}{ll} a) \sqrt{12-x} = x+8 & b) \sqrt{4x+13} + 2 = \sqrt{-2x+3} \\ c) \sqrt{7x+1} = 2\sqrt{x+4} & d) \sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 5 \end{array}$$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

$$\begin{array}{llll} a) 5^{2x-1} = \frac{25^{2x+3}}{5^x} & b) 6^{2x+3} = 81 & c) 3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 39 & d) 4^{x-1} + 2^{x+2} = 48 \\ e) \frac{3^{x-3} \cdot 27^{x+1}}{3^x \cdot 9^{x-3}} = 729 & f) \frac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 186 & g) 3^x + 3^{2-x} = 10 & h) 4^{x+1} + 2^{x+3} - 320 = 0 \end{array}$$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{array}{ll} a) 2 \log x - \log(x+6) = 0 & b) \frac{\log(16-x^2)}{\log(3x-4)} = 2 \\ c) \log x^3 = \log 6 + 2 \log x & d) \log(x-1) + \log(x+1) = 3 \log 2 + \log(x-2) \\ e) \frac{\log 2 + \log(11-x^2)}{\log(5-x)} = 2 & f) \log(5x+4) - \frac{1}{2} \log(x+4) = 100 \end{array}$$

15. Resuelve los sistemas:

$$\begin{array}{lll} a) \begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} & b) \begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x - y = 9 \end{cases} & c) \begin{cases} 2^x + 3^x = 4 \\ 2^{x+1} - 3^{x-1} = 1 \end{cases} \\ d) \begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} & e) \begin{cases} 2 \log x + 3 \log y = 7 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases} & f) \begin{cases} 3^x + 5^y = 6 \\ 3^{x+2} + 5^{y-1} = 10 \end{cases} \end{array}$$

• **Tema 4: Inecuaciones**

16. Resuelve las inecuaciones:

$$\begin{array}{lll} a) \frac{2x+1}{5} - \frac{3x+1}{4} \leq \frac{2x+3}{2} & b) x^3 + 5x^2 + 6x > 0 & c) \frac{2x-1}{-x+3} \geq 0 \\ b) \frac{x+1}{3} - \frac{3x+1}{4} \geq \frac{3x+3}{2} + 2x & c) -2x^3 + x^2 + 4x - 3 < 0 & f) \frac{-2x+4}{x^2-1} \leq 0 \end{array}$$

17. Resuelve los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{ll} a) \begin{cases} 2x - y \leq 4 \\ x + y > 5 \end{cases} & b) \begin{cases} x - 3y < -1 \\ 3x + y \geq 7 \end{cases} \end{array}$$

• **Temas 6 y 7: Trigonometría. Resolución de triángulos.**

18. Halla las restantes razones trigonométricas del ángulo α en los siguientes casos:

$$\begin{array}{ll} a) \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{5}, 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ & b) \cot g \alpha = -\frac{3}{4}, 90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ \\ c) \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}, \pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2} & d) \sec \alpha = 4, \frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi \end{array}$$

19. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

$$\begin{array}{llll} a) 120^\circ & b) 225^\circ & c) 330^\circ & d) 1230^\circ \\ e) 135^\circ & f) 240^\circ & g) 300^\circ & h) 930^\circ \end{array}$$

20. Sabiendo que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$ y $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, halla:

$$a) \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) \quad b) \operatorname{sen}(\pi - \alpha) \quad c) \cos(\pi + \alpha) \quad d) \operatorname{tg}(2\pi - \alpha)$$

21. Sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$ y $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, halla:

$$a) \operatorname{sen}(\pi - \alpha) \quad b) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad c) \operatorname{cosec}(180^\circ + \alpha) \quad d) \cot g(360^\circ - \alpha)$$

22. Calcula la altura de una torre, si situándonos a 25 m de su pie observamos la parte más alta bajo un ángulo de 45° .

23. Dos amigos quieren saber la altura de una torre de pie inaccesible. Para ello, uno sube a la torre y lanza el extremo de una cuerda hacia afuera. El otro se aleja con la cuerda hasta que queda tensa, y la clava al suelo. La cuerda mide 50 m y forma con el suelo un ángulo de 30° . ¿Cuánto mide la torre? ¿A qué distancia de la base de la torre han clavado la cuerda?

24. Desde la orilla de un río, observamos la copa de un árbol situado en la otra orilla, bajo un ángulo de 60° . Si nos alejamos 10 m de la orilla, el ángulo de observación es de 45° . Calcula la altura del árbol y la anchura del río.

25. Dos amigos han creído ver un OVNI, desde dos puntos situados a 800 m, con ángulos de elevación 30° y 60° , respectivamente. ¿A qué altura se encuentra el OVNI?

26. En un triángulo rectángulo la altura “h” sobre la hipotenusa “a” divide a ésta en dos partes que miden “m” y “n” respectivamente. Los catetos miden, a su vez, “b” y “c”. Halla los valores que faltan:

a) $b = 5\text{cm}$ y $c = 3\text{cm}$

b) $m = 2\text{cm}$ y $n = 8\text{cm}$

c) $a = 10\text{cm}$ y $c = 6\text{cm}$

d) $b = 15\text{cm}$ y $h = 12\text{cm}$

• **Temas 8: Vectores y rectas**

27. Dados los vectores $\vec{u}(3,2)$, $\vec{v}(1,-2)$ y $\vec{w}(-2,3)$, calcula:

a) $\vec{v} + 2\vec{w}$

b) $\vec{v} \cdot \vec{w}$

c) *ángulo formado por \vec{v} y \vec{w}*

d) $3\vec{v} - \vec{w}$

e) $\vec{u} \cdot \vec{w}$

f) *ángulo formado por \vec{u} y \vec{w}*

28. Halla el punto medio del segmento \overline{AB} , siendo:

a) $A = (2,3)$ y $B = (3,5)$

b) $A = (1,-4)$ y $B = (5,3)$

29. Calcula la distancia entre los puntos:

a) $A = (4,7)$ y $B = (-2,-1)$

b) $A = (1,-4)$ y $B = (5,3)$

30. Escribe todas las ecuaciones de la recta que:

a) pasa por el punto $P(2,4)$ y tiene vector director $\vec{u}(-2,3)$

b) pasa por el punto $Q(3,-1)$ y tiene vector director $\vec{v}(-1,2)$

31. a) Escribe las ecuaciones explícita y continua de la recta que pasa por los puntos $P(3,-1)$ y $Q(-2,5)$.

b) Escribe las ecuaciones general y punto-pendiente de la recta que pasa por $P(2,-3)$ y $Q(1,3)$.

32. Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas. En caso de que sean secantes halla el punto de corte.

a) $r : 3x + 2y - 5 = 0$ $s : 4x - 2y - 3 = 0$	b) $r : 2x - y - 8 = 0$ $s : -6x + 3y - 9 = 0$	c) $r : 2x + y - 6 = 0$ $s : -4x - 2y + 12 = 0$
d) $r : x + 2y - 5 = 0$ $s : 2x - y - 5 = 0$	e) $r : x + 2y - 8 = 0$ $s : 3x + 6y - 9 = 0$	f) $r : 2x - 2y - 6 = 0$ $s : -x + y + 3 = 0$

33. a) Halla la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto P(1,-3) y es paralela a $r : 2x - 5y + 1 = 0$.

b) Halla la ecuación general de la recta que pasa por P(3,-1) y es perpendicular a $r : y = 2x - 3$.

c) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por P(-1,5) y es paralela a $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$.

d) Halla la ecuación explícita de la recta que pasa por P(3,-1) y es perpendicular a la recta $r : 2x + 5y - 3 = 0$

34. Halla el ángulo que forma las siguientes rectas con el eje de abscisas:

a) $2x - 3y + 1 = 0$	b) $\frac{x-2}{3} = y + 1$
c) $y = -2x + 3$	d) $y - 2 = \frac{2}{3}(x - 1)$

• **Tema 9: Límites de sucesiones**

35. Halla los límites:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 1}{n^2 - 3}$	b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 1}{n^3 - 3n + 2}$	c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n + 1)(2n - 6)}{2n^2 - n + 1}$
d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)(n^3 + 3)}{n^2 - 3}$	e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n - 1}{2n^3 + 3n - 1}$	f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n + 1)(2n + 3)}{2n^2 - n + 1}$
g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 3}{2n - 1} \right)^{3n}$	h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + 1}{2n - 4} \right)^{\frac{n}{2}}$	i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{n - 1} \right)^{\frac{n^2 + 1}{2n}}$
j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n - 1}{3n + 2} \right)^{\frac{2n}{3}}$	k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n - 3}{2n + 1} \right)^{n-3}$	l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n + 1}{n - 3} \right)^{n+1}$

• **Tema 10: Funciones**

36. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^3 + 3x - 1$	b) $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 2x - 15}$	c) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$
d) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$	e) $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2}$	f) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$

37. Estudia las simetrías de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = x^2 + 2 \quad b) f(x) = 2x^3 + 3x - 1 \quad c) f(x) = x^3 - 3x \quad d) f(x) = 2x^4 - 5x$$

38. Halla $f \circ g$ y $g \circ f$ en los siguientes casos:

$$a) f(x) = \frac{3x+2}{x^2-1}, g(x) = 3x+4 \quad b) f(x) = \sqrt{x-1}, g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

$$c) f(x) = \frac{x+5}{2x+6}, g(x) = \frac{x^2+1}{x-1} \quad d) f(x) = \sqrt{x^2+3}, g(x) = \sqrt{2x+2}$$

39. Halla la función recíproca de:

$$a) f(x) = 3x - 2 \quad b) f(x) = \frac{3x+1}{2x-4} \quad c) f(x) = 2x + 3 \quad d) f(x) = \frac{2x-3}{5x+1}$$

• **Tema 11 y 12: Límites, continuidad, asíntotas y representación gráfica**

40. Calcula los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3}{x - 1} \quad b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3}{x - 1} \quad c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - x - 6}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x - 2} \quad e) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 1}{x^2 + x - 2} \quad f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$$

41. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} \quad b) f(x) = \frac{2x^3 + 1}{x^2 + 1} \quad c) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \quad d) f(x) = \frac{3x^3 + 4x - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

42. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \frac{x+3}{x^2-9} \quad b) f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < -1 \\ x^2-3 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 3x-5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \frac{x-3}{x^2-x-6} \quad d) f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 1 \\ 2x-3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

43. Representa las siguientes funciones:

$$a) y = 2^x \quad b) y = \log_2 x \quad c) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$d) y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad e) y = \log_{\frac{1}{2}} x \quad d) f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -1 \\ 2x^2 + 3 & \text{si } -1 \leq x \leq 4 \\ 3x - 2 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

• **Tema 13: Derivadas**

44. Halla la ecuación punto pendiente de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos indicados:

a) $f(x) = x^2 + 3x - 1$ en $x = 2$

b) $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$ en $x = -1$

c) $f(x) = x^3 + 5$ en $x = -2$

d) $f(x) = \frac{5}{2x}$ en $x = 3$

45. Halla las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{tg}(2^{x+2})$

b) $f(x) = \frac{2x+3}{e^{3x+1}}$

c) $f(x) = (2x+1) \cdot \operatorname{sen}(Lx)$

d) $f(x) = \frac{2x^3 - 3x + 1}{x^2 - x + 1}$

e) $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{L(5x + 2)}$

f) $f(x) = (5x-1)\sqrt{x^3}$

• **Tema 16: Combinatoria**

46. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5?

47. ¿De cuántas formas distintas podemos elegir delegado y subdelegado entre 30?

48. ¿De cuántas formas se pueden sentar 5 personas en un banco de 5 plazas?

49. 15 alumnos están preparando la Olimpiada Matemática de 2ºESO. Para participar en la 1ª fase tenemos que formar equipos de 3. ¿Cuántos equipos distintos podemos hacer?

50. En el torneo “Don Serafín” participan 10 equipos de fútbol de 3º y 4º. ¿De cuántas formas distintas se pueden repartir las medallas de oro, plata y bronce?

51. ¿De cuántas formas distintas se pueden elegir tres personas de una clase de 30 alumnos para exponer un tema de Cultura Clásica?

52. 20 alumnos de 3º y 4º se presentan a la 1ª fase del Concurso de Primavera de Matemáticas y 4 de ellos se clasificarán para la 2ª fase. ¿Cuántos grupos distintos podríamos formar para la 2ª fase?

53. Desarrolla utilizando el Binomio de Newton:

a) $(2x+5)^7$

b) $(3x-2)^5$